研究動機

我們從數學書籍*Mathematics and Chess*找到1908年美國總統大選期間流行的棋戲” Presidential Candidates”。棋盤中有9個字母，代表9位候選人，配置如圖1下：

依「一次只能以國王走法(King's Move)縱、橫、斜走1步」或「跳過並移除任一相鄰候選人 (躍吃子)(Jumpover)」。以最少步數移動，僅存一位即是贏家。

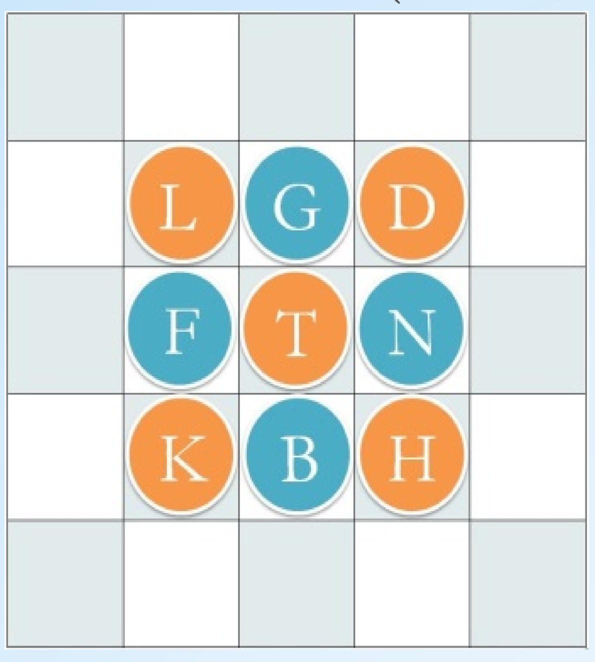

圖1：原始遊戲棋盤配置
(研究者繪製)

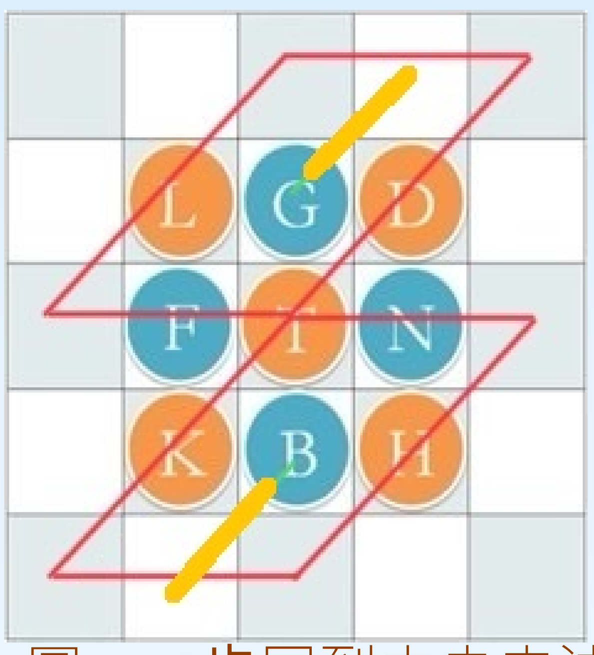

圖2：**3步**回到中央走法
(研究者繪製)

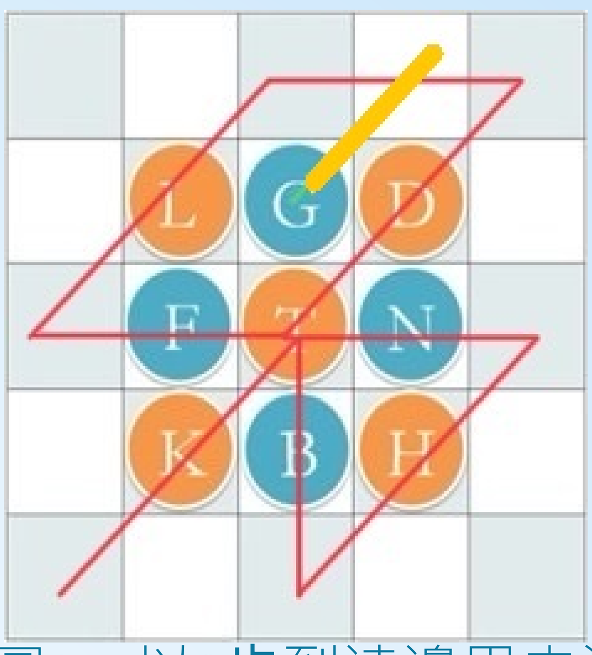

圖3：以**2步**到達邊界走法
(研究者繪製)

針對原遊戲設計，我們試想有無其它挑戰?例如把路徑模擬為選舉的掃街拜票，那麼要怎麼走才能將選舉效益最大化?例如不回到中央，改為走到邊界的最少步數。

研究目的

一、名詞定義

1. 圖(graph)：一個圖是一個有序對G=(V, E)，其中點集V是一個非空集合；邊集E則是一些V中的二元無序對的集合。通常用V(G)代表點集，E(G)代表邊集。
2. 環(ring)：一個n點環是由n個相異點及m條與其中任兩點相鄰的邊，使得存在一條通過所有點的封閉路徑(closed path) ，$m \geq n$ 。
3. 弦(chord)：一條邊uv為一環R的弦，iff u∈V(R)且v∈V(R)且uv∉E(R)。
4. 圈(cycle)：又叫做洞(hole)，是一個沒有弦的環。
5. 樹(tree)：一張圖G是樹iff $\forall x, y \in G\ \exists!\ (x, y) - path$，形成n點路徑以$P_n$表示。 本研究中最常見的樹是KM= P_2。
6. 森林(forest)：一個森林是有限個樹的聯集，等價於無環圖。
7. 度序列(degree sequence)：點V的度序列指該點相連(incident)邊數，記為DS(V)。
8. 同構(isomorphic)：若V(G)=V(H)且 E(G)=E(H)，則稱G與H同構，記為G≅H。
9. 歐拉行跡(Euler trail)與歐拉圈(Euler cycle)：歐拉行跡是由起點v_i出發，連續的經過每一條邊恰好一次後抵達終點v_j。若v_i與v_j相同，則稱為歐拉圈。

二、問題情境與符號

1. Oct_n係八連方(octominoes)，n表示「長×寬」型態，35指「長」3 單位和「寬」5單位範圍內的八連方；+*Pent*係八連方後接五連方(pentominoes)，*Pent* X指五連方X型，標為$Oct_{35} + P_5X$或略為Oct_{35}+X。
2. A 表示佔地範圍(area)，指棋盤上曾經被棋子佔格的格數，A_{max}表示最大佔地範圍。
3. C表示行跡合成(trail composition)，C_d指直接合成(C-direct)，C_r指反向合成(C-reverse)，C_{am}表示補空合成(C-amend)。
4. V_t 表示臨時停駐點(temporary stop)，非候選人配置的格子都可供躍子停駐； V_f 表示分岔點(fork)，DS≥ 3；具有銜接性質則標示銜接點。
5. V_n^c表示環圖，n指環點數；V_{max}^c表示構成環的最大點數，$V_{max(x,y)}^c$指x, y最大共用環。
6. L_{max}是最長路徑，表示路徑圖中任意兩點可連通最長無環路徑，$L_{max(x,y)}$表示x, y兩點間最長路徑。

研究工具

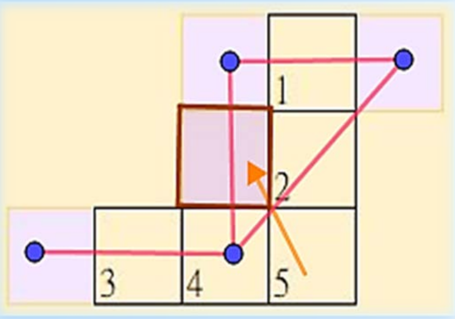

圖4：Pent-V型
(研究者繪製)

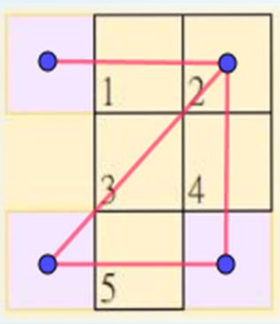

圖5：Pent-P型
(研究者繪製)

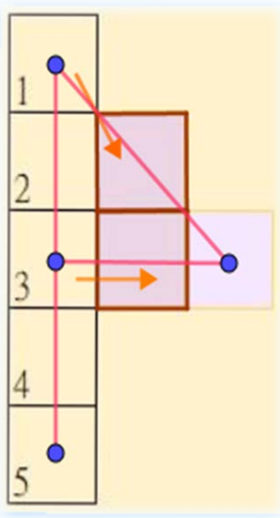

圖6：Pent-I型
(研究者繪製)

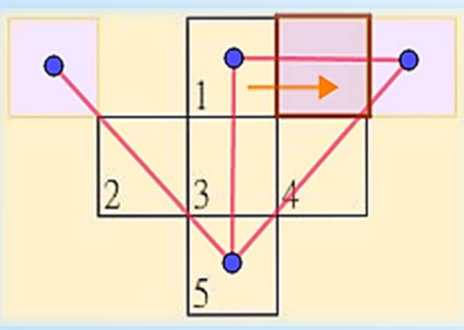

圖7：Pent-X型
(研究者繪製)

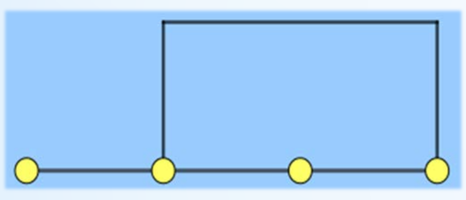
圖8： V_3^c加1分支
(研究者繪製)

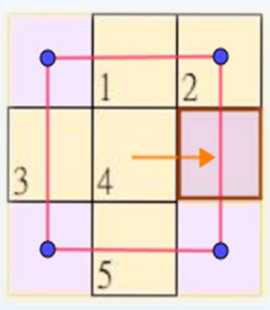

圖12：Pent-F-3型
(研究者繪製)

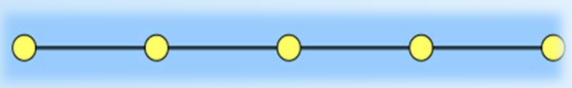
圖11：T_5
(研究者繪製)

五連方
行跡

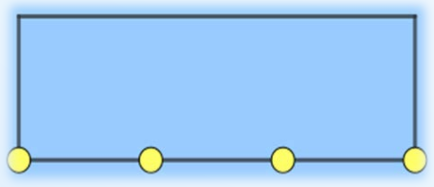
圖14：V_4^c
(研究者繪製)

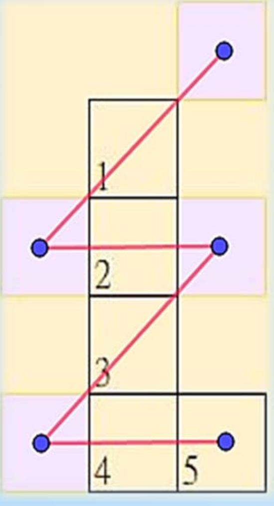

圖9：Pent-L型
(研究者繪製)

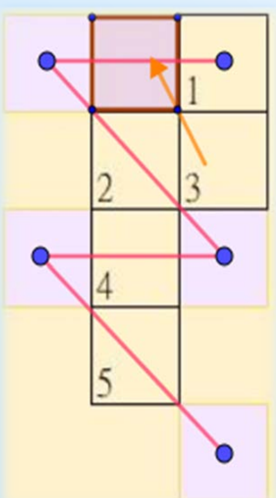

圖10：Pent-N型
(研究者繪製)

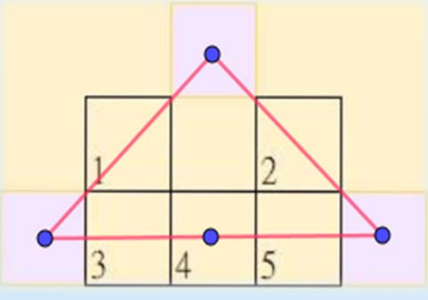

圖13：Pent-U型
(研究者繪製)


圖15：Jumpover 1
(研究者繪製)

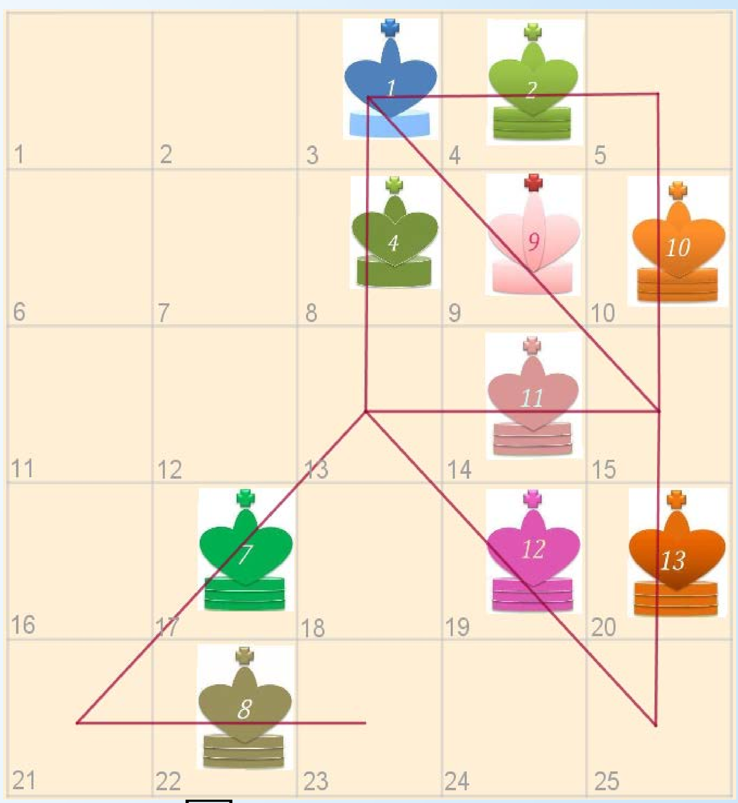
圖16：Jumpover 2
(研究者繪製)

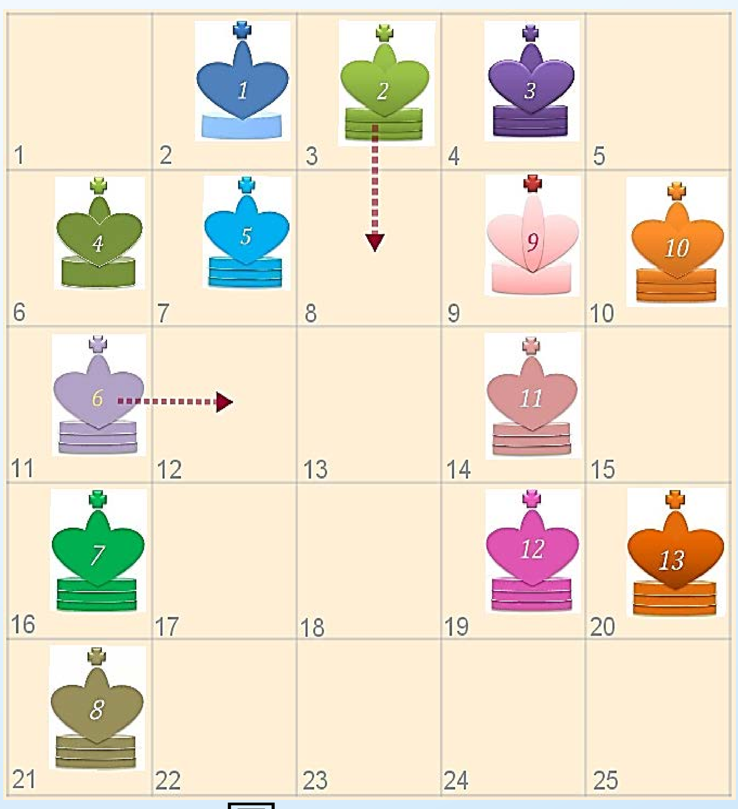
圖17：2 KMs
(研究者繪製)

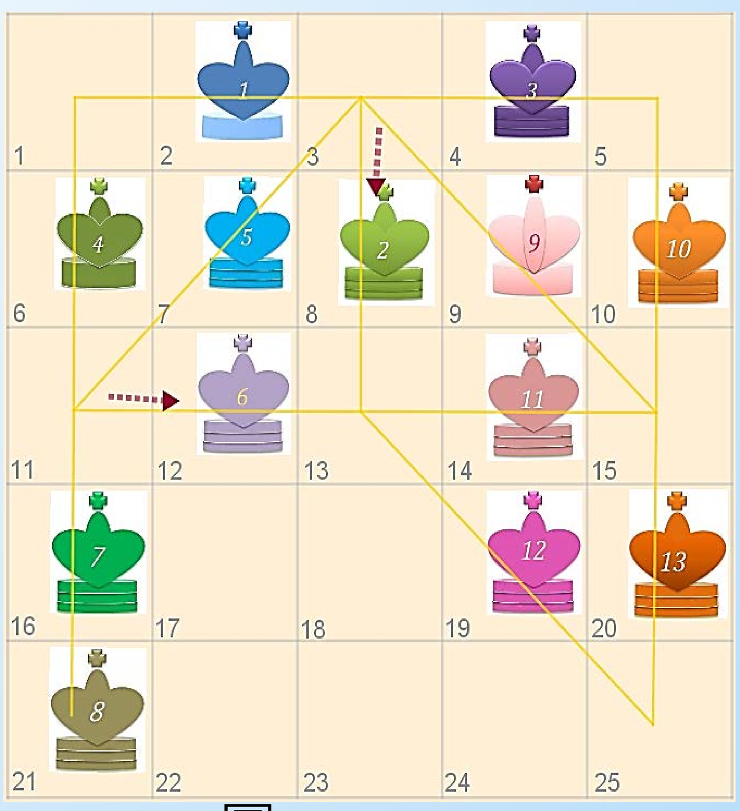
圖18：1 Jumpover
(研究者繪製)

研究結果與討論

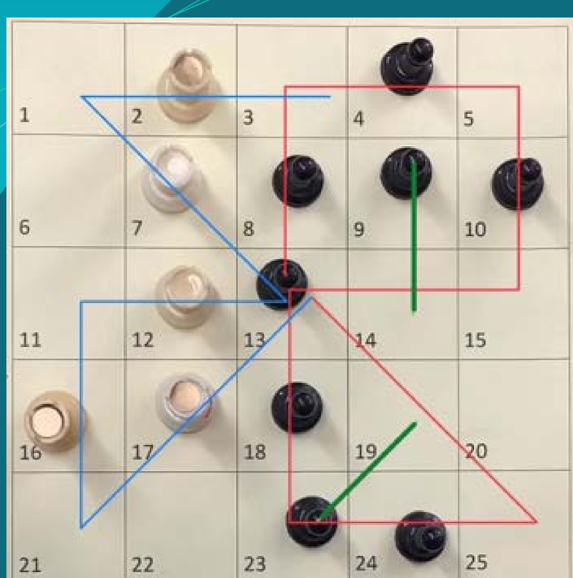

圖20：35-22+L_2路徑
(研究者繪製)

$KM/A_{max}=2/22$
$(V,E)=(9,12)$

$KM/A_{max}=1/18$
$(V,E)=(7,12)$

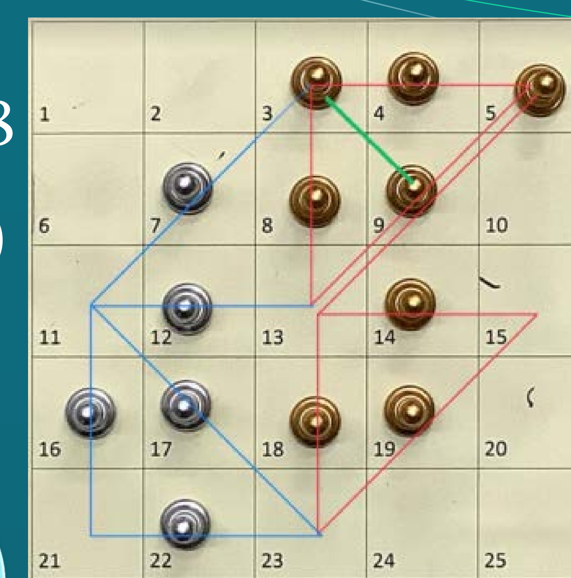

圖21：34-24+Y_16 路徑
(研究者繪製)

最大佔地範圍 A_{max}

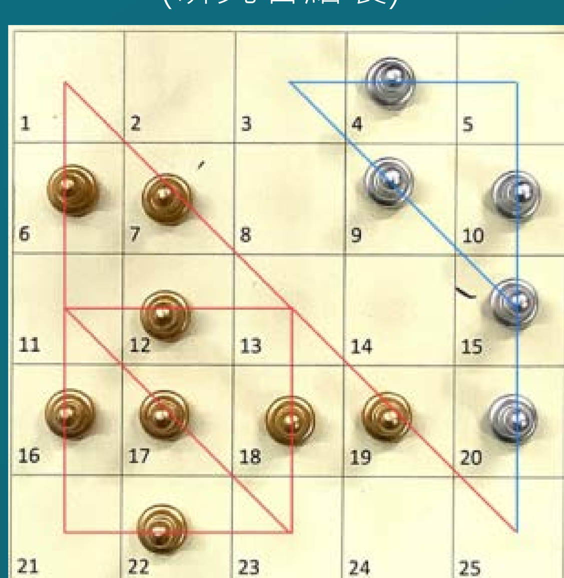

圖22：44-17+N路徑
(研究者繪製)

$(V,E)=(9,12)$
$KM/A_{max}=1/21$

$(V,E)=(9,12)$
$KM/A_{max}=2/23$

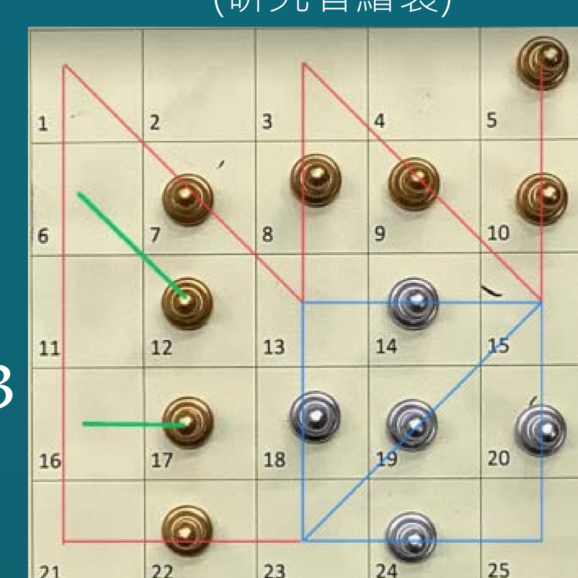

圖23：45-8+X_2 路徑
(研究者繪製)

實-實-虛

$x\equiv y(mod\ 2\times 2)$

圖25：類型I (研究者繪製)

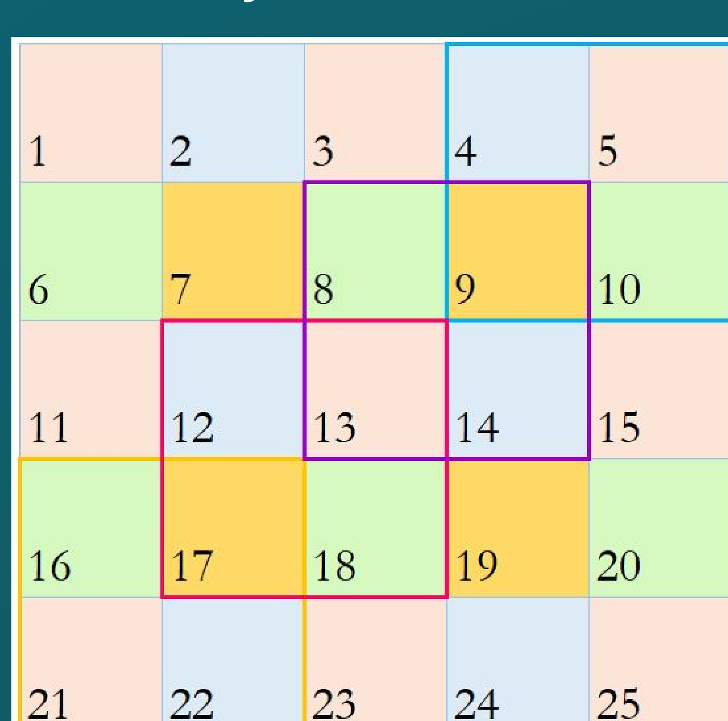

圖24：連方塊2×2 為1個單位
(研究者繪製)

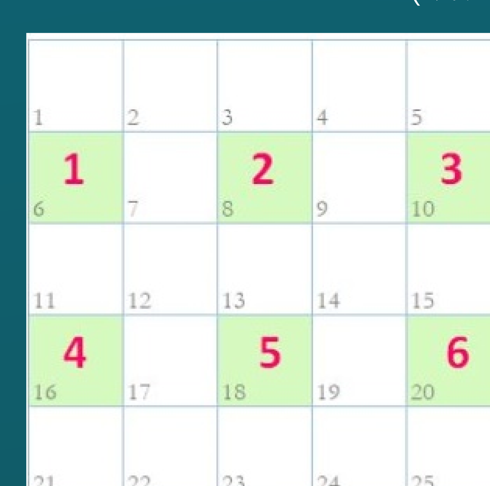

圖26：類型II (研究者繪製)

圖28：類型IV (研究者繪製)

圖27：類型III (研究者繪製)

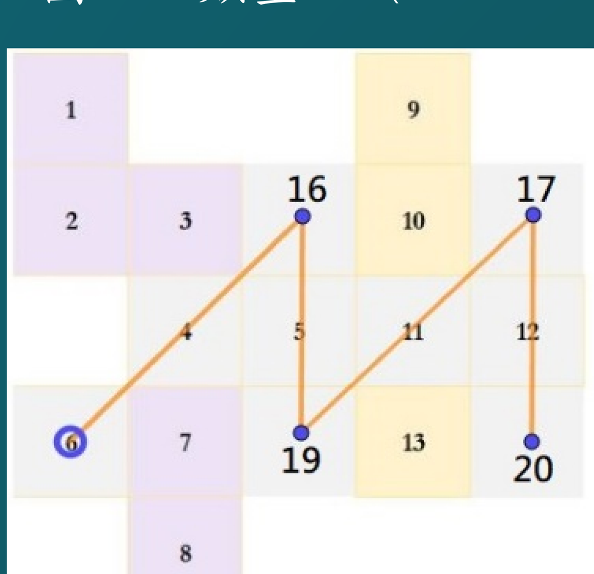

圖29：Jumpover 1
(研究者繪製)

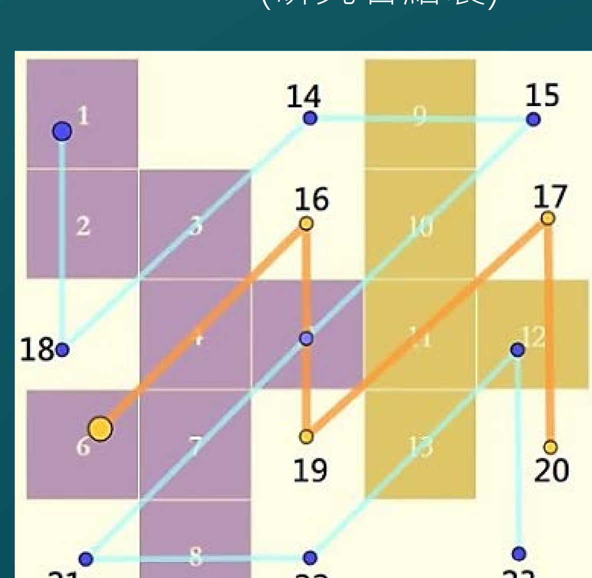

圖31：行跡合成
(研究者繪製)

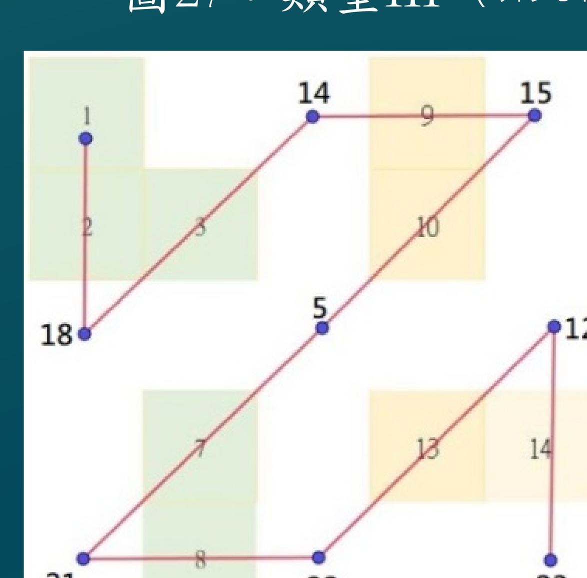

圖30：Jumpover 2
(研究者繪製)

$F=\cup_1^2 T_x, T_x\in\{T_1,T_2\}$

$T_1=P_5=(V_6,V_{16},V_{19},V_{17},V_{20})$

$T_2=P_9=(V_1,V_{18},V_{14},V_{15},V_5,V_{21},V_{22},V_{12},V_{23})$

23⟹15⟹5⟹3⟹
1⟹11⟹23⟹13⟹
3⟹15⟹13⟹11⟹ 3

歐拉圈

DS=(4, 2, 2, 6, 4, 2, 2, 2)
3⟹5⟹15⟹3⟹11⟹13⟹21
⟹23⟹13⟹15⟹23⟹13⟹3

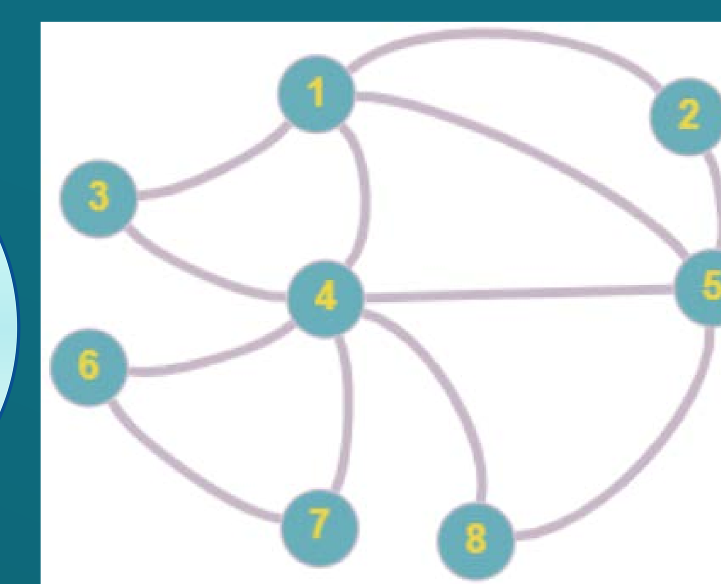

圖32：35-5+U 行跡 (研究者繪製)

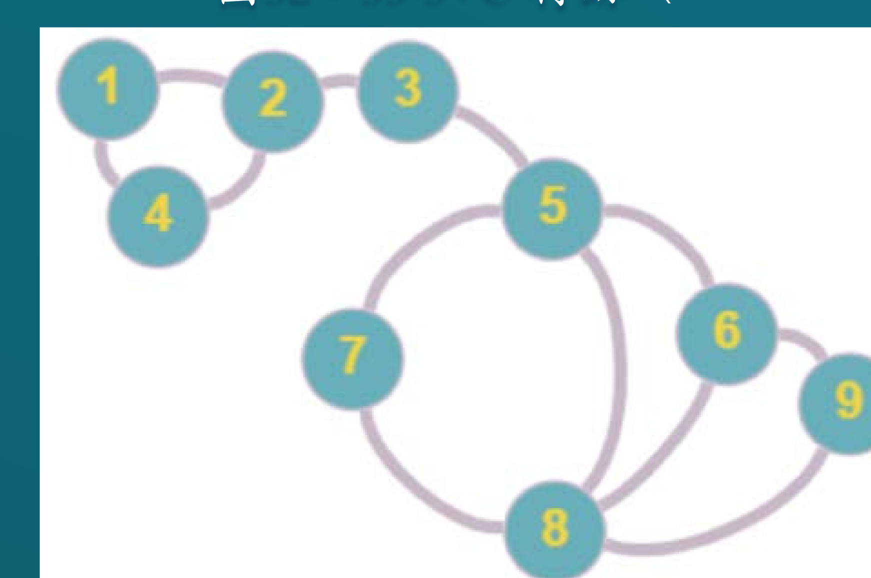

圖33：35-11+X 行跡 (研究者繪製)

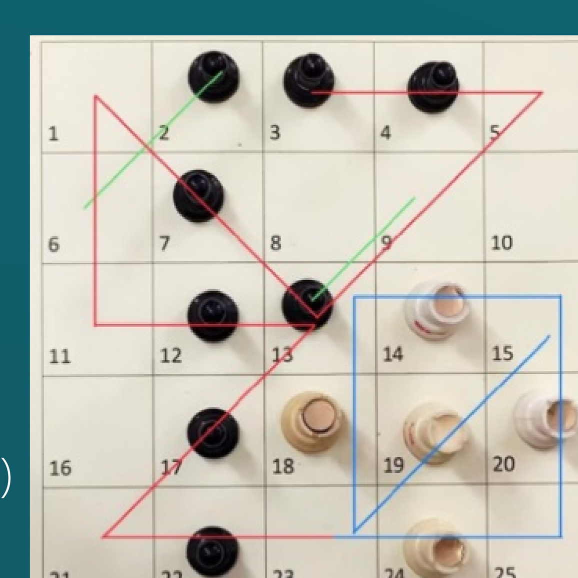

圖34：35-3+X_2
(研究者繪製)

DS=(2, 3, 2, 2, 4, 3, 2, 4, 2)
3⟹1⟹11⟹3⟹5⟹13⟹15⟹
25⟹23⟹21⟹13⟹23⟹15

歐拉行跡 Eulerian Trail

DS=(2, 1, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2)
3⟹5⟹13⟹15⟹
25⟹23⟹13⟹1⟹
11⟹13⟹21⟹23⟹15

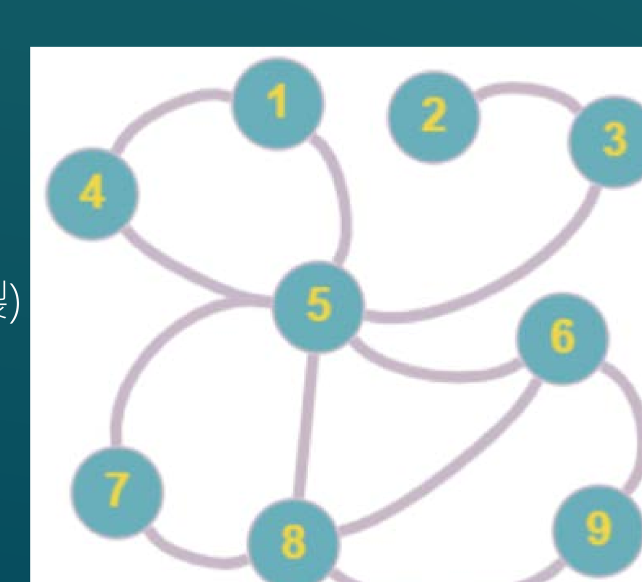

圖35：35-3+X_2
(研究者繪製)

最大環 V_m^c

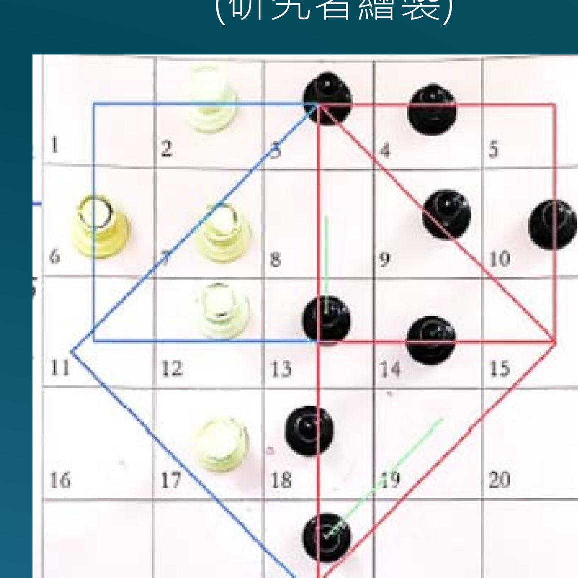

圖36：35-27+Y (研究者繪製)

DS=(2,5,2,4, 4, 4,3)

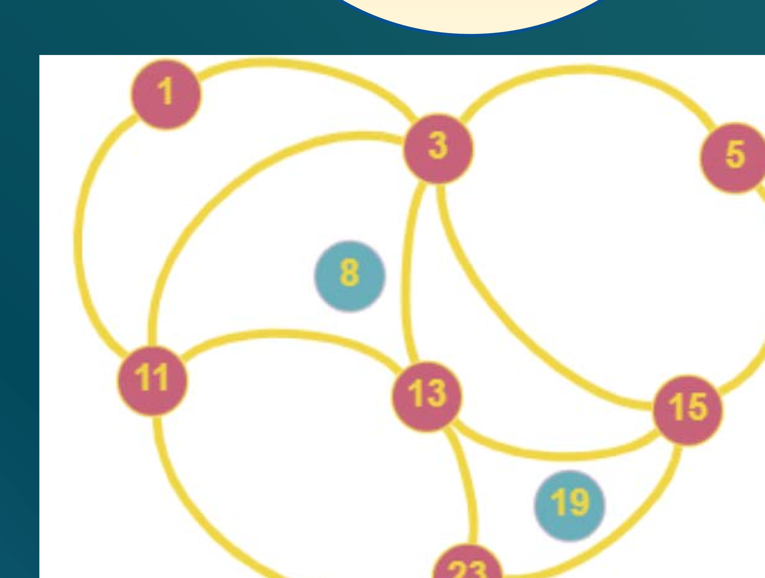

圖37：35-27+Y (研究者繪製)

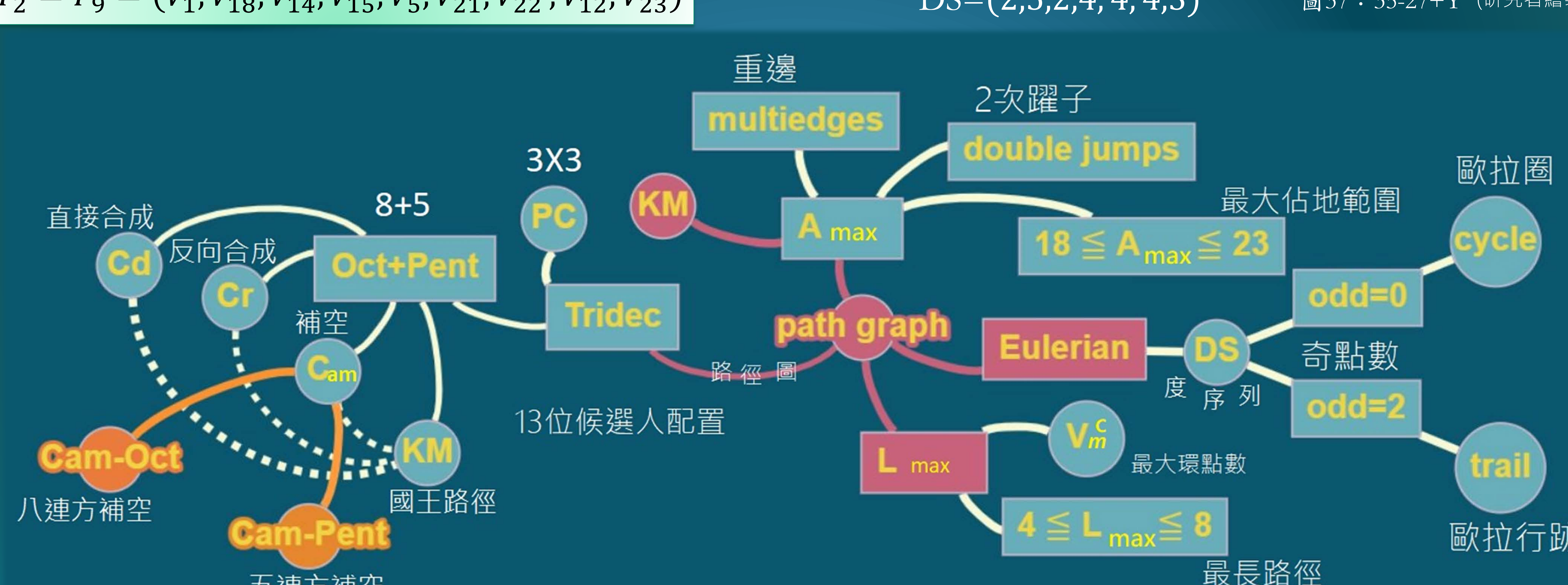

圖19：研究架構 (研究者繪製)

最長路徑L_{max}

圖同構

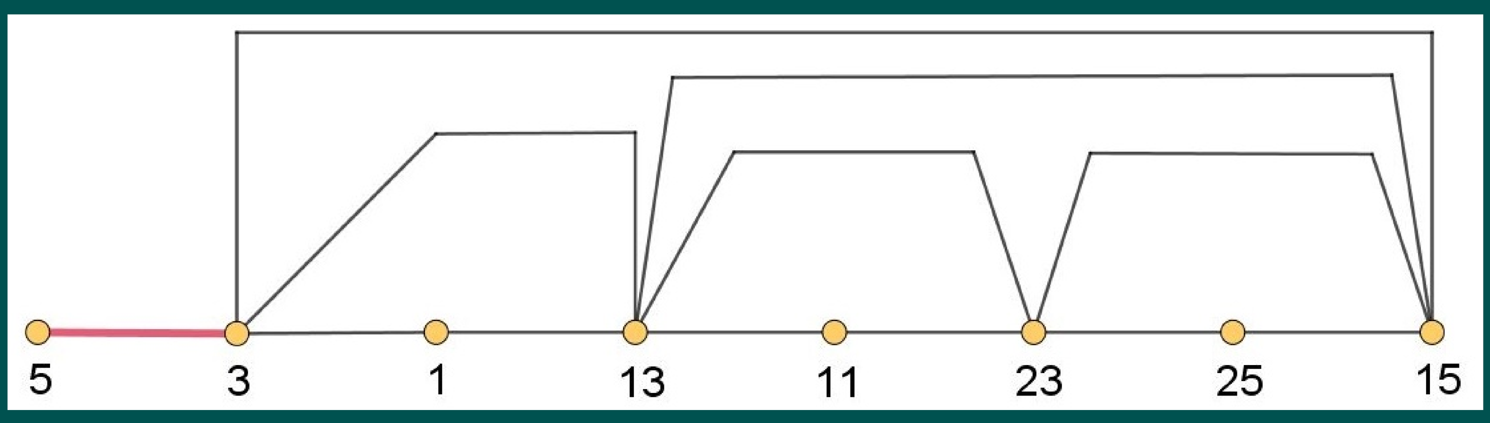

圖38：34-13+X　（研究者繪製）

多圖同構有1個分支，
V_f=4，$L_{\max(5,15)}=7$

V_f=3，$L_{\max(25,21)}=7$

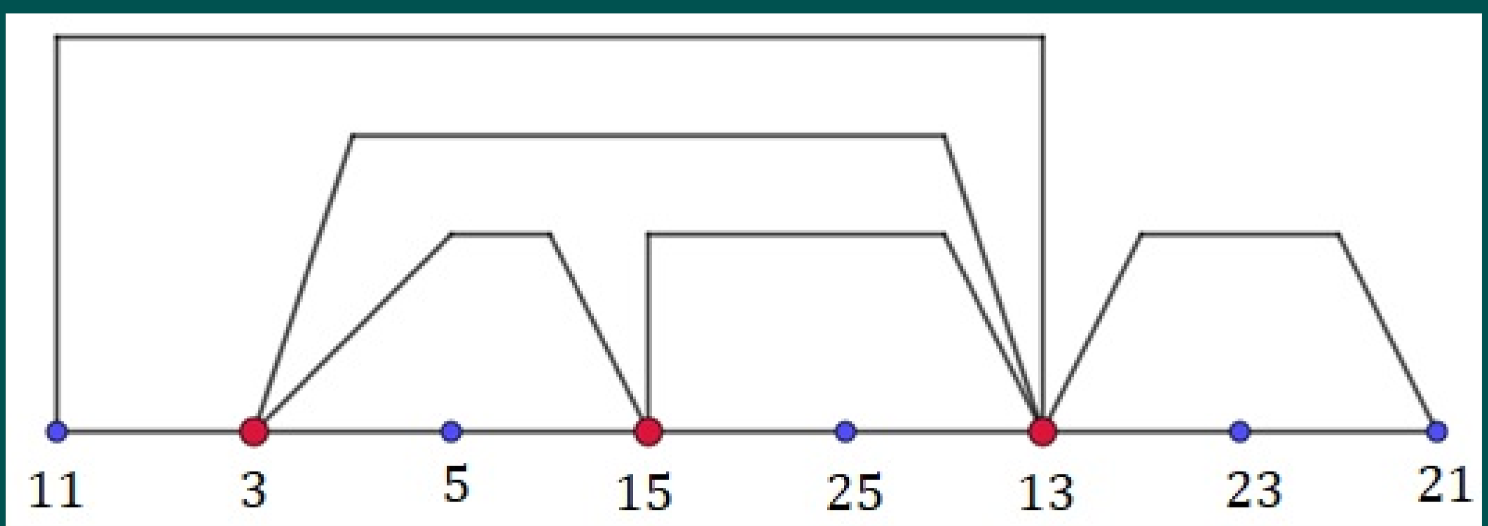

圖40：44-2+N（研究者繪製）

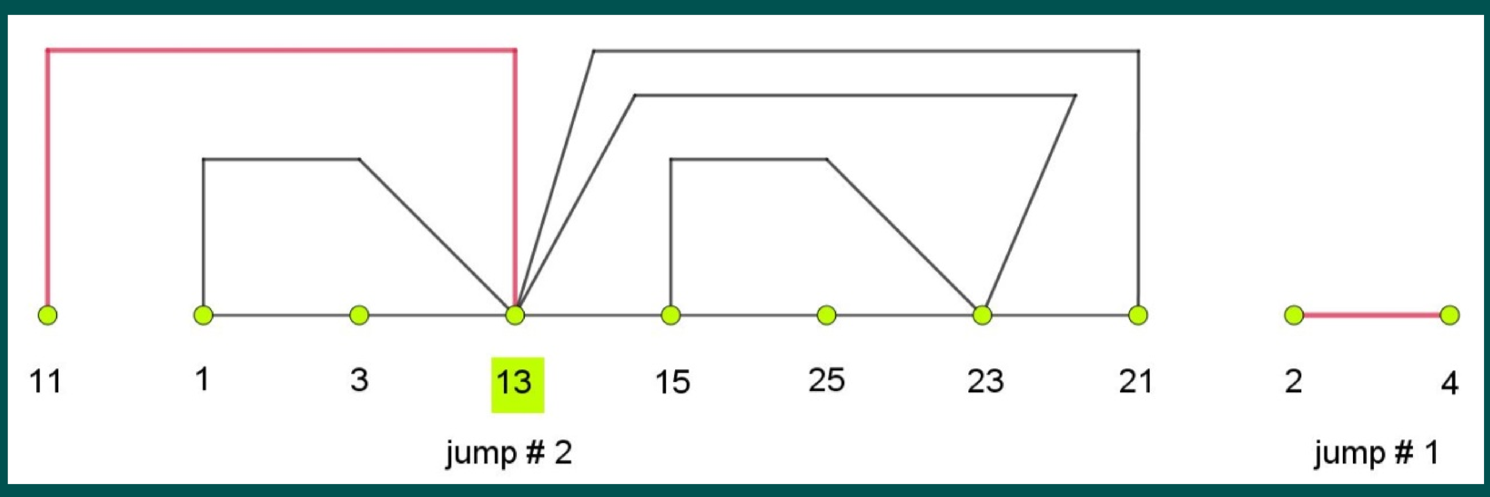

圖39：45-52+X　（研究者繪製）

V_f=3，$L_{\max(1,21)}=6$

多圖同構，V_f=3，$L_{\max(5,15)}=7$

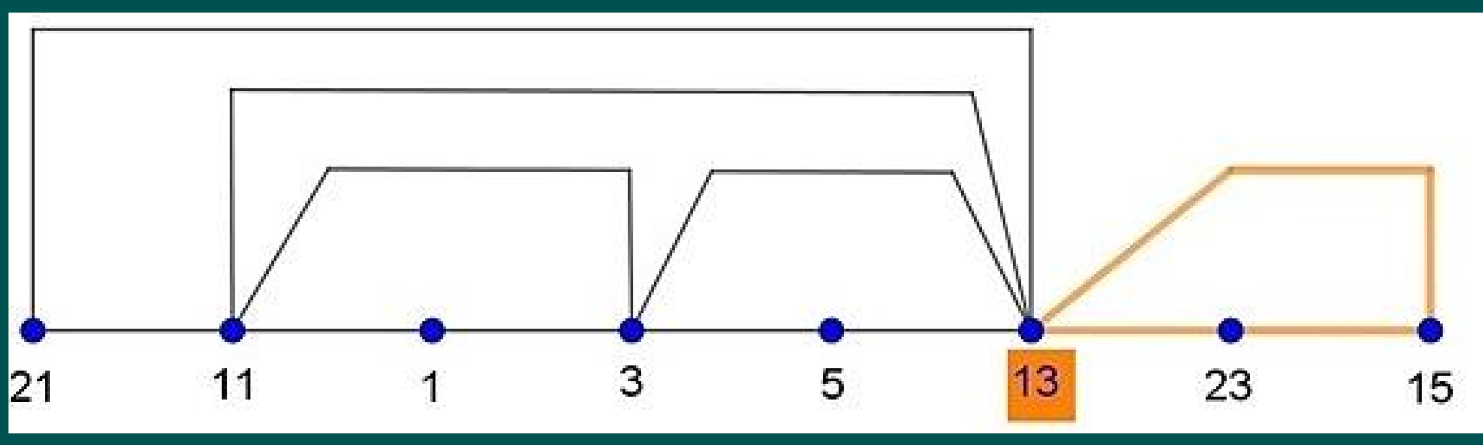

圖41：34-27+Y（研究者繪製）

【命題1】$\forall x,y\in V(L_{\min(a,b)}), V^C_{max(x,y)}=0 \Longrightarrow L_{\max(a,b)}=L_{\min(a,b)}$ 最短路徑。

【證明】若$\forall x,y\in V(L_{\min(a,b)}), V^C_{max(x,y)}=0$，由於沒有環可以製造多重路徑，所以兩點間只會有一條路徑，既是最短路徑也是最長路徑。

【說明】路徑中任兩點沒有共用環，除了由起點直接走到終點的路徑$L_{\min(a,b)}$外，其他路徑皆會形成環。

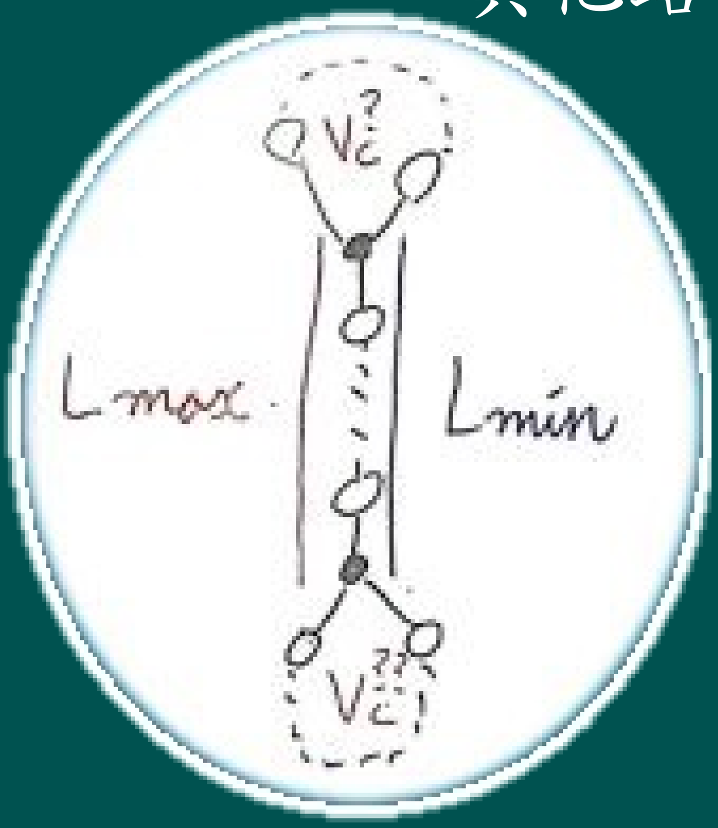

圖42：證明1
（研究者繪製）

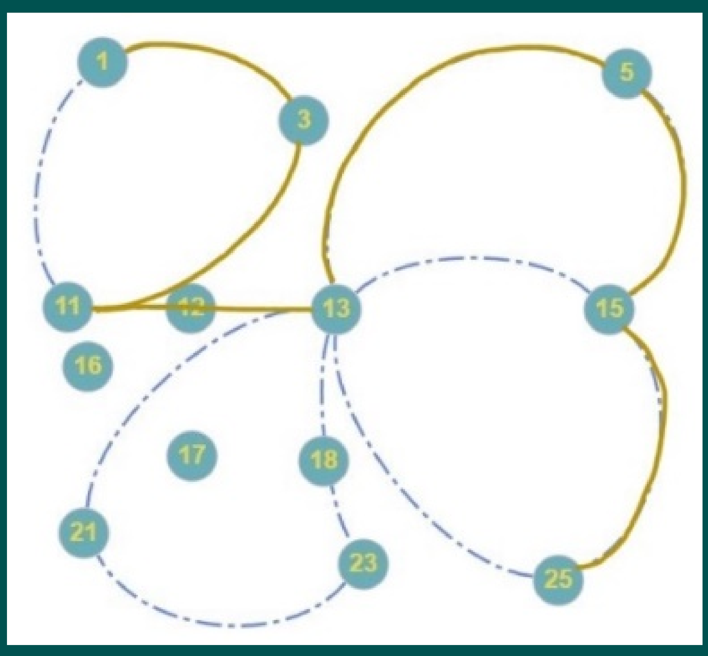

圖43：35-23+U
（研究者繪製）

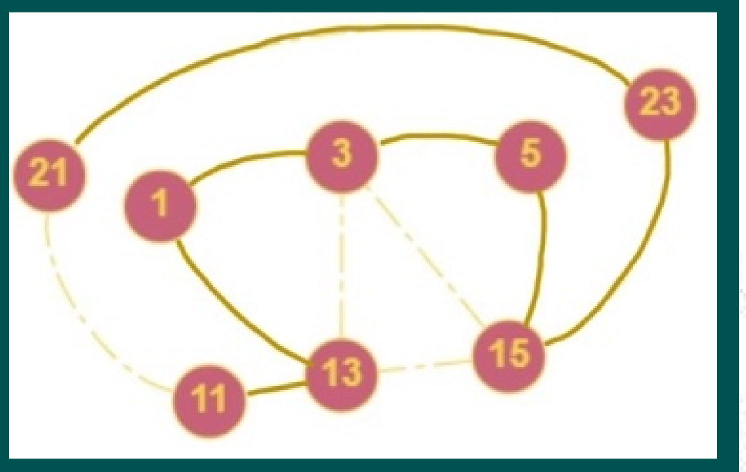

圖44：35-6+X
（研究者繪製）

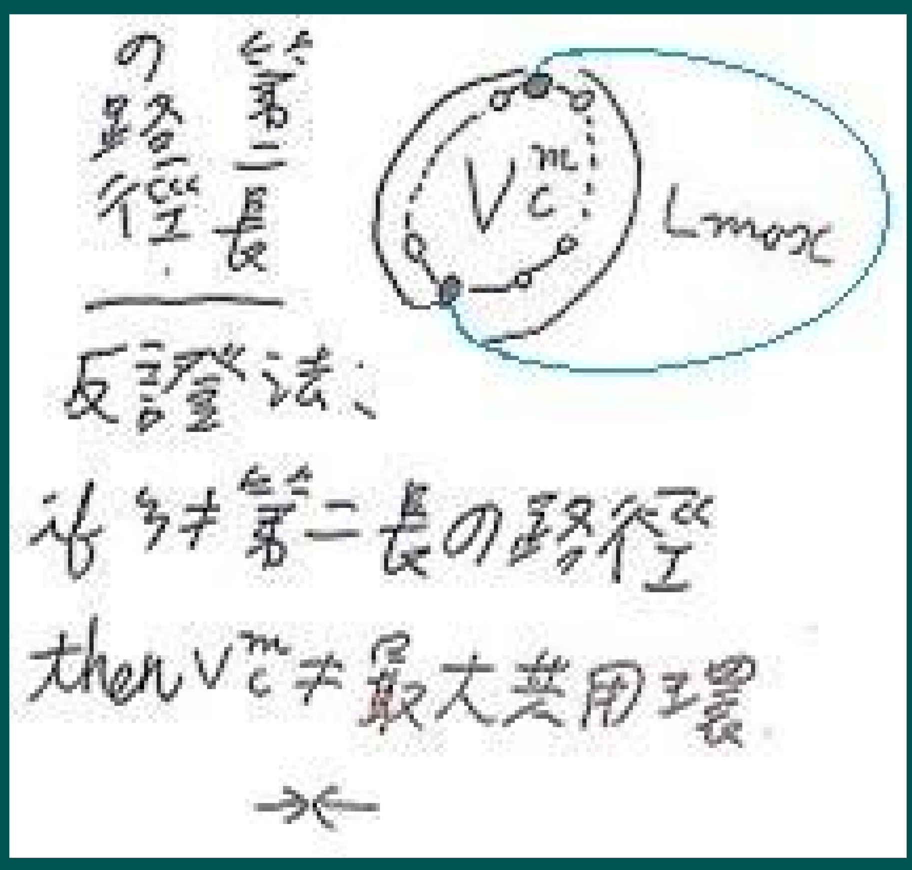

圖45：證明2
（研究者繪製）

【命題2】$V^C_{\max(a,b)}\neq 0 \Longrightarrow L_{\max(a,b)}=V^C_{max}$ —兩點之間第2長的路徑長度。

【證明】
由於$V^C_{\max(a,b)}\neq 0$，a和b有共用環，兩點間路徑有2條。最長的那一條為$L_{\max(a,b)}$，另一條路徑是兩點之間第2長路徑：如果不是，則此環一定有弦，矛盾。

因此，$L_{\max(a,b)}$可由$V^C_{\max(a,b)}$ —兩點間第2長的路徑得到。

研究結論

一、佔地範圍區間考慮重邊和躍子路徑，關係如下：

重邊對最大佔地範圍的影響

有重邊：$A_{max}=V+E+2KM-KM\ repeated-Multiedges$

無重邊：$A_{max}=V+E+2KM-KM\ repeated$

有2次躍子路徑：$A_{max}=V+E+2KM-KM\ repeated-jump\ repeated$

(一)在5 × 5棋盤範圍內，環圖的佔地結果如下：

$$18\le A_{34max}\le 21$$
$$19\le A_{35max}\le 22$$
$$19\le A_{44max}\le 21$$
$$19\le A_{45max}\le 21$$

(二) 在5 × 5棋盤範圍內，樹圖佔地結果$A_{max}=23$ 。

二、歐拉行跡遇到「分叉點」會增加選擇，重複踩點；遇到「圈」會減少重複踩點的次數；遇到「有分支的環」則必先走完環才走分支。

三、依據環特徵及分岔點數量，本研究得到每張路徑圖的最長路徑範圍如下：

$$4\le L_{34max}\le 8$$
$$4\le L_{35max}\le 8$$
$$5\le L_{44max}\le 8$$
$$5\le L_{45max}\le 8$$

(參考文獻略)